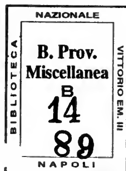

FONDO PIZZOFALCONE




NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
B
14
89
VITTORIO EM. III
NAPOLI

OPUSCOLO

FILOSOFICO—ANALITICO

SUL NUOVO ALGORITMO

DEL

CALCOLO DIFFERENZIALE

DI

AGATINO SAMMARTINO



CATANIA

DALLA TIPOGRAFIA

DE' REGJ STUDJ

1814

AVVERTIMENTO

Citerò all' occorrenza qualche mio lavoro inedito e non delle opere altrui già impresse e conosciute; 1° perchè in siffatto lavoro mi trovo aver concretato il progetto di cui tratto; 2° perchè ignoro degli autori, se pur ve ne siano, che abbiano ciò eseguito; 3° per provare col fatto che il mio assunto non è una semplice specolazione filosofica e di novità, ma facile bensì a realizzarsi; 4° per dare un qualche cenno di un lavoro che concepito e diretto sulle vedute del presente argomento non ho potuto rendere al pubblico per varj mottivi.

Denoterò inoltre co' numeri di richiamo isolati fra parentesi i paragrafi di questo opuscolo; e cogli altri mi riporterò a quelli

lelle opere alle cui citazioni sono annessi.

Finalmente aggiungerò un indice non o-tante la picciolezza del volume: e ciò sulla agione della varietà de' soggetti integrali 'el tutto che rapidamente vi si considerano.

NUOVO ALGORITMO

DEL

CALÇOLO DIFFERENZIALE



La imponente autorità del più grande elaborioso analista de' nostri tempi, Lagrange, mi fu di bastante mottivo per adottare al menomo annunzio il di lui progetto sulla rivoluzione de' segni del Calcolo Differenziale; progetto che ho riconosciuto di poi sempreppiù ragionevole in se stesso, utile nelle conseguenze, e degno dell'uomo celebre che ce lo ha proposto.

In questo Opuscolo esporrò i miei proprj pensieri su di tale argomento: proponendomi di farne vedere i vantaggi, e stabilirne colla guida di un'analisi ragionata il sistema di nomenclatura onde concretarlo con semplicità e speditezza.

Lavori varj sì nell'analisi pura che mista ho eseguito nelle vedute del divisato progetto. Ne sottopongo questo perora alla saggia censura del pubblico illuminato: e mi riserbo ad esibirgliene degli altri più positivi, quando la libera comunicazione col continente mi avrà reso appieno convinto del voto che ne avranno dato i sommi geometri, e dell'uso che ne avrà fatto in progresso il suo autore medesimo.

Per camminare con metodo ho diviso in due parti la materia del mio lavoro. Nella prima mi

darò ad esaminare la natura delle nuove notazioni del calcolo differenziale; e nella seconda a tradurle e paragonarle colle antiche. I caratteri di preferenza decisa di quelle sopra di queste notazioni, sarà il risultato delle mie filosofico-analitiche ricerche.

PRIMA PARTE

1. L'oggetto de'segni di convenzione nell'analisi non è che di esprimere delle idee fondamentali, onde renderne il discorso facile, compendioso, distinto. La natura adunque dell' algoritmo in questione non dee ripetersi che dalla metafisica del calcolo, a cui appartiene; algoritmo tanto più corrispondente al suo fine, quanto più questa metafisica sarà soda, e dimostrata; e i suoi rapporti con essa ne saranno più stretti.

2. Il teorema, che Lagrange diede prima nel 1772 fra gli atti dell'Accademia di Berlino, e poi nel 1796 con più estensione nella sua *Theorie des fonctions analitiques* comprende la vera metafisica del calcolo differenziale: quindi bisogna ricorrere a questo teorema per conseguire l'assunto.

3. La f è la notazione del vocabolo *funzione* in quanto ne è la lettera iniziale.

Sappiamo che per segnare le grandezze in generale si usano le lettere dell'alfabeto latino; uso introdotto dal Vieta: oggi ne è divenuto ancora comune quello del greco.

Dippiù sappiamo per legge tipografica che queste lettere si prendono dal carattere, in termine tecnico, detto *corsivo*.

Quindi per non indurre ad equivoco la segna-

tura f di funzione si prende dall'altro, che si dice *tondo*, e che si destina alle diciture.

Quindi fx è la notazione generale delle funzioni ad una sola variabile x.

Quindi f$(x, y, z, \ldots)$ può esser quella delle funzioni ad un numero indefinito di variabili.

Fissata questa prima notazione passiamo alle altre.

4. fx diviene

$$f(x+i) = fx + p_1 i + p_2 i^2 + \ldots p_n i^n + \ldots$$

se x vi riceve un aumento indeterminato espresso con i.

Questa è la forma generale dello sviluppo di f$(x+i)$; forma in cui i coefficienti p_n sono delle funzioni di x indipendenti da i, ed in cui si comprendono le sole potenze intere e positive di i; forma sempre vera, finchè x ed i restano indeterminate, ed alle volte falsa, quando x vi riceve un qualche valore particolare.

Lagrange ci ha dimostrato *a priori* la realità di questa forma, ed altri analisti non hanno lasciato inseguito di tirarne delle pruove passive dalla teoría delle serie. Noi non ci arrestiamo sopra di ciò; nè ci fermiamo a vedere la natura dell' eccezioni a cui va soggetta la regola generale. Questo non è necessario al nostro argomento: ne ho esposto i dettagli ragionati in un altro lavoro (Calcolo diretto delle funzioni derivate) che ho annunziato fin dal 1808 nella mia *Raccolta di teorie matematiche*. La natura e l' indole de' coefficienti p_n è ciò che solo c'interessa. Veggiamolo.

5. f$(x+i+h)$ può essere la conseguenza di un nuovo aumento indeterminato h di x o di i in f$(x+i)$. In entrambi i casi debbono i risultati esserne identici.

Stabilita questa verità, che Lagrange ci ha proclamato (op. cit. 16.), ecco come nella maniera la più generale può arrivarsi allo scopo.

Mettendo 1° $x+h$ per x nella formola (4) se ne avrà

$$p_n(x+h) = p_n + p'_n h + p''_n h^2 + \dots p^{(r)}_n h^r + \dots$$

pell' espressione generale de' coefficienti che ne risultano, i quali sostituiti ci daranno

$$h^r(p_r + p^{(r)}_1 i + p^{(r)}_2 i^2 + \dots p^{(r)}_n i^n + \dots)$$

pel termine generale dello sviluppo di $f(x+h+i)$

2° Mettendovi $i+h$ per i avremo il termine generale di questo sviluppo sotto l'espressione

$$h^r \left\{ \begin{array}{l} p_r + (n+1) p_{r+1} i + \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} p_{r+2} i^2 \\ + \dots \dfrac{(n+1) \dots (n+r)}{1.\,2 \dots r} p_{r+n} i^n + \dots \end{array} \right\}$$

Queste due espressioni del termine generale sono identiche e perciò ci danno una serie di equazioni tutte comprese nella generale

$$p^{(r)}_n = \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+r)}{1.\,2 \dots r} p_{r+n}$$

equazione da cui si ha il valore delle funzioni

$$p_{r+n} = \frac{1.\,2 \dots r}{(n+1)(n+2) \dots (n+r)} p^{(r)}_n$$

valore da cui, fatto successivamente

$$r = 1 = 2 = 3 = \ldots$$

se ne avrà il seguito di quì appresso

$$p_{n+1} = \frac{1}{n+1} p'_n$$

$$p_{n+2} = \frac{1 \cdot 2}{(n+1)(n+2)} p''_n$$

$$p_{n+3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)} p'''_n$$

ec. ec.

6. Ciascuna di queste equazioni ha luogo egualmente, poichè l'identità stabilita *a priori* (n° prec.) è completa. Quindi i valori che sene tirano da qualunque di essi per le funzioni cercati p_n debbono essere in fondo gli stessi. Questa conseguenza potrebbe comprovarsi *a posteriori:* ciò sarebbe quì superfluo: lo farò altrove (mio lav. ined. cit). Assumendo adunque la prima di queste equazioni, perchè la più semplice, e perchè i cercati valori vi si comprendono tutti, ne avremo la formola (4) sotto la nuova forma

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{f}(x+i) = \mathrm{f}x + p' i + \frac{1}{2} p'_1 i^2 + \frac{1}{3} p'_2 i^3 \\ + \ldots \frac{1}{n} p'_{n-1} i^n + \frac{1}{n+1} p'_n i^{n+1} + \ldots \end{aligned}\right\}$$

b

7 Ritornando sulla formola (4)

$$p_n(x+h) = p_n + p'_n h + \ldots$$

si rileva che ciascuna delle funzioni p'_n è côstantemente il primo coefficiente dello sviluppo della corrispondente p_n sostituendovi $x+h$ per x; ovvero per essere (num. preced.)

$$p_n = \frac{1}{n} p'_{n-1}$$

è il primo coefficiente dello sviluppo del coefficiente del termine che lo precede. Quindi assumendo c′ per cifra di *coefficiente primo*, ed fp per quella della funzione di x che fa parte del termine precedente, avremo questa nuova forma nuovamente trasformata nella

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{f}(x+i) = \mathrm{f}x + c'\,\mathrm{fp}\;i + \frac{1}{2} c'\,\mathrm{fp}\;i^2 \\ \quad + \frac{1}{2.3} c'\,\mathrm{fp}\;i^3 + \ldots \frac{1}{1..n} c'\,\mathrm{fp}\;i^n + \ldots \end{array}\right\}.$$

formula che ci disvela quasi a colpo d' occhio la natura de' coefficienti in queſtione, e con eſſa la notazione filosofica, che vi compete,

In effetto osservando il sistema della sua composizione si vede 1° che ciascuno de' suoi coefficienti tira la sua esistenza in una maniera sempre uniforme dal precedente; 2° che tutti la tirano dal primo termine fx; 3° che ognuno considerato in se stesso esiste per una, due, tre, ec. derivazioni, cioè esiste in generale per un nume-

ro di derivazioni marcato dal posto n, che occupa nella serie.

Quindi 1° ne sappiamo i due caratteri generali che ne costituiscono la natura analitica: cioè sappiamo che ciascuno è sempre una funzione di x, e che questa funzione deriva in un modo costantemente uniforme da un'altra funzione: cioè sappiamo cosa è, e come è: il segno adunque per notarlo dee esprimere simultaneamente le due idee di una funzione e di una derivazione; condizione che si trova pienamente soddisfatta nella frase *funzione derivata*.

Quindi 2° fx rispetto alle funzioni derivate è nella serie in una posizione indipendente ed originaria, e perciò dee notarsi con un segno diverso; segno che dee esprimere l'idea composta di una funzione che indipendente a sestessa ha e dà un' esistenza analitica, e che si trova senza studio nell'espressione *funzione primitiva*.

Quindi 3° il segno particolare per distinguere una funzione derivata dall' altra, bisogna che porti l' impronta del grado della funzione nella scala delle derivazioni; condizione che ci guida ad unire al segno generale il vocabolo segnante questo grado; cioè che ci fa prendere pel segno particolare di una funzione derivata la frase *funzione prima*, *seconda*, *terza*, ec. *derivata*; ma senza mancare di filosofia, o peccare di oscurità può di questo segno compendiarsene l' espressione, dicendo *funzione nsima* a luogo di funzione nsima derivata; poichè l'n ordine derivato, ed il posto n nella serie di una funzione sono due idee, di cui l'una non può esistere senza che l'altra esista; cioè sono due idee analiticamente associate; epperò funzione nsima, che ne segna senza equivoco (in quanto non avvi in

analisi altra gradazione nelle funzioni che quella risultante dal teorema (4) lagrangiano) la seconda, ce ne richiama necessariamente la prima, e ci esprime non esplicitamente, ma implicitamente e per associazione l' idea caratteristica eziandio della derivazione.

8. Quale sarà ora la cifra che più conviene alla già stabilita notazione vocale? la cifra f del vocabolo *funzione* secondata dal numero esprimente l'ordine della funzione derivata; cosa che non soffre difficoltà. Avvertiamo però che situeremo questo numero alla destra in alto, ond' essere più apparente e non confondersi co' segni delle grandezze; situazione conforme all' adottata nell' antico linguaggio per distinguere gli ordini differenziali ed integrali, e che non può prendersi per un segno di esponenti, in quanto la lettera f è presa dal carattere delle diciture e non da' segni delle grandezze.

Quindi $f^n x$ è la cifra generale di tutti i coefficienti c'fp: la formola dunque (num. preced.) diviene

$$f(x+i)=fx+if^1x+\frac{i^2}{2}f^2x+\ldots\frac{i^{n-1}}{1..(n-1)}f^{n-1}x + \frac{i^n}{1..n}f^nx+\ldots$$

formola che dal Geometra, che ce la ha insegnata, può dirsi lagrangiana.

9. La notazione, di cui già abbiamo esposta alla nostra maniera la Metafisica, è stata proposta ed usata dal Lagrange (lav. cit.). L' impos-

sibilità di comunicare da più e più anni le cognizioni col Continente, fa che io non sappia sino al punto in cui scrivo (Genn° 1814) se essa sia stata o no adottata nella nuova Analisi. La soluzione dell' equazioni numeriche dello stesso Lagrange; il Calcolo differenziale ed integrale di Lacroix; un opuscolo di Pietro Paoli nel supplemento a' suoi elementi di Algebra, ecco tutte le opere venute a mia mano, che ne parlano; opere nella seconda delle quali la divisata notazione si oppugna, e ſolamente nella prima ſi adibisce.

Lagrange nelle cifre particolari delle funzioni derivate uſa gli apici e non gli esponenti: in maniera che ſecondo lui $f'x$, $f''x$, $f'''x$. ec. sono le notazioni delle funzioni, prima, ſeconda, terza, ec.; uso adottato probabilmente per uniformarſi alla convenzione introdotta in analisi di segnare escluſivamente con apici i vocaboli *primo*, *secondo*, *terzo*, ec.. Ma Lagrange avrebbe dovuto a rigore prendere in tal caso $f^{(n)}x$ e no $f^{n}x$ per la cifra generale di tali funzioni, poichè (n) e non n segna in virtù di queſta convenzione un certo numero di apici. Noi ci siamo scoſtati dall' esempio imponente del celebre Autore 1° per uniformarci senza mancare di chiarezza (num. preced.) alla maniera già in uso nel Calcolo differenziale; 2° perchè operando a rigore dovrebbe correggerſi $f^{n}x$ in $f^{(n)}x$, e perciò ſi verrebbe nei metodi generali a caricare di parentesi a complicare ed a rendere confuſa l' espreſsione cifrale delle formole; 3° perchè senza cadere in oscurità o contraddizione può ſarsi lecito il sinonimizzare il segno esponente al segno apice nel noſtro caſo, in cui la cifra parla il ſuo linguaggio esclu-

sivo. Da ciò si vede che noi non intendiamo proscrivere ne' segni particolari l' uso degli apici: anzi potendo riuscire alle volte più vantaggioso in quanto risparmia una mezza linea nell'impressione, potrà adottarsi simultaneamente a quello degli esponenti quando si vuole.

10. Si è parlato finora delle funzioni ad una variabile; passiamo a quelle multivariabili.

La derivazione delle funzioni implicite si fa dipendere da quella dell'esplicite. Le ragioni che ci provano la legittimità di questa dipendenza, ed il metodo per concretarla non hanno qui luogo. Ne parlerò altrove *(mio lav. ined. cit.)*. Parliamo dunque delle seconde solamente.

Le variabili di una funzione esplicita sono indipendenti fra loro: quindi 1° l' una varia indipendentemente dall'altra: 2 una o più di esse possono variare nel tempo che le altre rimangono costanti. Questo carattere delle funzioni esplicite colle divisate due conseguenze ci abilita a potervi considerare il cambiamento delle variabili l' uno dopo dell' altro: a farne dipendere perciò la variazione totale da quella delle funzioni unavariabili, ed a ripeterne lo sviluppo dalla formola lagrangiana. Tale metodo, il più semplice e naturale che ci si presenta, il più filosofico che potremmo immaginare, e l'unico forse per riuscir nell' impresa, è chiaro che dà origine a delle funzioni derivate della natura stessa di quelle che abbiamo già considerato. Queste nuove funzioni derivate come possono aver luogo ora per le une ed ora per le altre delle variabili, così bisogna che la loro notazione comprenda un carattere segnante l'individualità di quelle che in atto si considerano: dunque è di mestieri che la già stabilita segnatura per le derivate delle funzioni unavariabili venghi modificata corrispondentemente a questo oggetto. Veggiamo come può utilmente eseguirsi.

Lagrange (*Theorie ec.n.* 85.) distinse con un apice superiore ed inferiore il cambiamento parziale di una funzione a due variabili, cioè notò

con $f'(x,y)$ *la funzione prima di* (x,y) relativa a dx

con $f_{\prime}(x,y)$ *la funzione prima di* (x,y) relativa a dy

Questa notazione non solo è mancante di espressione in quanto non manifesta la variabile, di cui si considera il cambiamento, che mercè una convenzione tutta tacita, ma ancora non può estenderfi che alle funzioni di un numero limitato di variabili. In fatti la lettera f non sà marcare con distinzione che quattro idee diverse per la variazione di luogo degli ápici, poichè l' apice non vi trova che quattro posti distinti, cioè alla testa ed in piede sì a destra che a sinistra; ne potrebbe forse trovare altri intermedj, ma ne risulterebbe una confusione. Quindi questa notazione potrebbe estenderfi, nò a due sole come dice Lacroix (*Traitè elem.de calc. differen. ec,* 345) ma a quattro variabili: e Lagrange stesso (*op.cit.* 103) ne fa uso fino a quelle di tre. Ma questo sommo geometrá vedendone senza meno l' inesattezza e l' insufficienzá, rigetta ogni sorte di apici eccetto i superiori a destra e fissa (*op.cit.* 163) per sua notazione generale la quì appresso.

$$f'(x),\ f'(y),\ \text{ec.}$$

funzioni prime di una funzione relative ad x sola ad y sola ec.

$$f''(x),\ f''(x,y),\ f''(y),\ \text{ec.}$$

funzioni seconde di una funzione relative ad x sola, ad x, y sole, ad y sola, ec.

ec. ec.

Notazione più generale della precedente, ma insatta come essa, in quanto non dà alcun segno della funzione primitiva a cui appartengono le derivate; usata dall' autore simultaneamente alla precedente dal n.33 al n. 163 *(op.cit.)*; completendo delle parentesi può rendere complicata e confusa l'espressione cifrale delle formole; ed a cui finalmente lo stesso autore ha sostituito *(solûz. des equat. num.)* la seguente

$$\left(\frac{Z'}{x'}\right),\ \left(\frac{Z'}{y'}\right),\ \text{ec.}$$

funzioni prime di Z rapporto ad x sola
ad y sola ec.

$$\left(\frac{Z''}{x'^2}\right),\ \left(\frac{Z''}{x'y'}\right),\ \left(\frac{Z''}{y'^2}\right),\ \text{ec.}$$

funzioni seconde di Z rapdorto ad x sola,
ad x, y sole, ad y sola, ec.

ec. ec.

11. Questa notazione, riflette opportunamente Lacroix *(op.cit.num.cit.)* non differisce

dalla euleriana $\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right)$

dalla waringhiana $\left(\frac{\ddot{Z}}{\dot{x}\dot{y}}\right)$

che negli apici solamente, i quali tengono luogo della lettera caratteristica d e de' punti: quindi ha

gli stessi difetti per cui queste sono oggi in disuso. Sembra dunque necessario il conchiudere, non già con Lacroix di rigettare la nuova notazione per lasciarne il posto all'antica, ma bensì che essa ricerca un cambiamento quando dalle funzioni ad una variabile si estende a quelle multivariabili. Io lo ripeto; non so cosa siasi fatto sino a questo momento sopra di ciò: quindi mi veggo alle strette di pensare da me; e seguendo le tracce del Lagrange, mi trovo obbligato d'introdurre de' nuovi segni nel ramo di analisi in cui siamo. Per non portare intanto un'assoluta novità, e non caricare senza un indispensabile bisogno di un carattere tutto nuovo questa analisi, credo non dovermi allontanare dalla notazione usata nel Calcolo alle differenze, e mutando la cifra DELTA, indicante una differenza, nella f, indicante una funzione, mi sembra potersi adottare con vantaggio la segnatura che presento nella tavola seguente; segnatura che propongo nei termini i più generali, e che è facile ad applicarsi a' diversi casi particolari; segnatura che nel fissarla oltre della lettera caratteristica DELTA nella f ho mutato ancora nella $\Lambda^{n+p}_{x,r}\, u$ (*Lacroix traité de Calc. different. et integr. in 4 n. 863.*) del **Calcolo** alle differenze, il segno + nella virgola, ad oggetto di prevenire qualunque equivoco che si potrebbe produrre nella sua espressione allorchè n, p vi prendono de' valori particolari; segnatura che appartenendo ad una parte soltanto della derivazione completa della funzione primitiva può dirsi *funzione derivata parziale*, oppure più in compendio e senza equivoco, *funzione parziale* o *derivata parziale*, in quanto senza il soccorso del vocabolo

c

derivata o *funzione* queste frasi ci richiamano abbastanza l'idea che segnano; segnatura finalmente che nota in un modo tutto espresso la cosa che rappresenta, che per qualunque verso si miri riesce più semplice filosofica e precisa dell'antica, che abbatte le barriere innalzate da qualche Geometra all'esecuzione del progetto di cui si tratta, e che concorre ad estendere i confini del regno dell'analisi, e con essi quelli di tutta la scienza cui serve di strumento, come di tutto ciò vedremo dettagliatamente in appresso.

TAVOLA

Delle funzioni derivate parziali

$$X = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

$$\mathrm{f}^{n}_{x} X$$

funzione nsima di X secondo la sola x

$$\mathrm{f}^{m,n}_{x,y} X = \mathrm{f}^{m}_{x} (\mathrm{f}^{n}_{y} X)$$

funzione nmsima di X che si ha col prendere la funzione m secondo x della funzione n di X secondo y

$$\mathrm{f}^{m,n,p}_{x,y,z} X = \mathrm{f}^{m}_{x} (\mathrm{f}^{n}_{y} (\mathrm{f}^{p}_{z} X))$$

funzione pnmsima di X che si ha prendendo della funzione p di X secondo z, la funzione n secondo y; e di questo, la funzione m secondo x

$$\mathrm{f}^{n,n,n}_{x,y,z} X \left(\begin{array}{c}\text{caso particolare del precedente ed} \\ \text{in forma di laconismo può farsi}\end{array}\right) = \mathrm{f}^{3n}_{x,y,z} X$$

funzione 3nsima di X presa n volte secondo x, quindi di ciò che ne risulta n volte secondo y, ed infine di ciò che ne viene n volte secondo z

. . . .

$$\mathrm{f}^{m,n,p,\ldots t}_{x,y,z,\ldots u} X = \mathrm{f}^{m}_{x}(\mathrm{f}^{n}_{y}(\mathrm{f}^{p}_{z} \ldots (\mathrm{f}^{t}_{u} X) \ldots))$$

funzione t... pnmsima di X che si ha prendendo consecutivamente l'una dall'altra la funzione derivata di X t volte secondo u, ... p volte secondo z, n volte secondo y, m volte secondo x

Pria di andare avanti si rifletta sulla segnatura proposta che

$$\mathfrak{f}^{m,n}_{x,y}X = \mathfrak{f}^{n,m}_{y,x}X$$

$$\mathfrak{f}^{m,n,p}_{x,y,z}X = \mathfrak{f}^{n,m,p}_{y,x,z}X = \mathfrak{f}^{p,m,n}_{z,x,y}X = \ldots$$

ec. ec.

vale a dire che è indifferente al risultato l' ordine secondo cui si considerano le variabili nel prendere le derivate l' una dall' altra: cosa che può dimostrarsi sì a priori come a posteriori, e che farò vedere nel mio lavoro inedito, il quale cito sovente per darne una qualche idea generale.

Ma passiamo alle notazioni del Calcolo inverso.

13. L' oggetto generale de' segni si è (1) quello di rendere semplice e compendioso il discorso. Col loro mezzo nell' analisi si registra in una sola linea un gran numero di verità, si restringe in poche pagine la materia che ne occuperebbe moltissime, e si esprime in una maniera facile e chiara delle lunghe serie di argomenti, di cui lo spirito senza un sommo sforzo d' attenzione (sovente deluso) non potrebbe vederne il legame. L' uso dunque de' segni nell' analisi non solo è utile, ma ancora fondamentalmente necessario: quindi non dee esservi ramo di essa in cui non sieno chiamati in soccorso.

Il Calcolo inverso delle funzioni derivate è per quanto io sappia mancante sin oggi di un segno proprio. Lagrange nel suo lavoro (*Theoric...*) in cui ne gettò le fondamenta, non ce ne suggerisce alcuna idea: ed egli nel tratto rapido (*lav.*

*cit.*62) sul ritorno delle funzioni derivate alle primitive vi avrebbe reso il discorso più preciso ed analitico senza una tale mancanza. Mio scopo fin dal principio di questa prima parte è stato di perfezionare l' algoritmo del Calcolo derivato. A tale oggetto per evitare ogni equivoco ho sostituito (2) nella segnatura generale delle funzioni la f tonda alla *f* corsiva da Lagrange impiegata; e per maggiore chiarezza semplicità e filosofia ho rimpiazzato (12) con delle notazioni parlanti e precise le da lui proposte ne' lavori citati (9) pel ramo diretto di questo calcolo. Mi resta ora a riempire il vuoto da lui lasciato, e proporre un segno proprio pel ramo inverso di esso. Io lo tirerò dal fondo stesso della cosa, e cercherò d'improntarvene la vera filosofia.

13. Si ritorni sulla formola lagrangiana (8), e si ragioni così: ciascuna delle $f^n x$ si forma (7) in una maniera costantemente uniforme dalla precedente $f^{n-1} x$: questa circostanza che ha fatto dire (7.1°) $f^n x$ la *funzione derivata* di $f^{n-1} x$, dee farci chiamare il metodo in generale che conduce da questa a quella *metodo della derivazione*, o semplicemente *la derivazione*: ora si consideri che come $f^n x$ si forma in una maniera costantemente uniforme da $f^{n-1} x$, così operando inversamente può $f^{n-1} x$ riguardarsi come formata in una maniera costantemente uniforme da $f^n x$: inoltre

siccome la prima si considera generata dalla seconda, così la seconda può considerarsi come generata dalla prima, sebbene in un modo tutto reciproco: la ragione adunque per cui $f^n x$ si dice *funzione derivata* di $f^{n-1}x$, ci porta a dire similmente questa *funzione derivata* di quella; altra differenza non essendovi che una opposizione nel modo della loro formazione, cioè una opposizione di derivazione.

Per distinguere l'uno dall'altro caso uop'è esprimere nelle corrispondenti notazioni questa opposizione. Nel primo caso non si considera che il cammino diretto della formola lagrangiana, laddove nel secondo se ne considera l'inverso: quindi la prima idea che fluisce dal fondo della cosa per marcare questa distinzione è di aggregare i vocaboli *diretta* ed *inversa* alle notazioni *funzione derivata* e *derivazione*; cioè dirsi

$f^n x$ la *funzione derivata diretta* di $f^{n-1}x$

$f^{n-1}x$ la *funzione derivata inversa* di $f^n x$

Derivazione diretta il metodo per arrivare nel primo caso dall'una all'altra

Derivazione inversa quello per arrivarvi nel secondo caso

Ma un'altra riflessione può farci abbreviare l'espressione di queste notazioni. Il vocabolo *retro* preso dal latino, segna in generale un cammino all'indietro: quindi può unirsi alla notazione *derivazione* per farsene quella della derivazione inversa, cioè la derivaz. inversa a distinzione della diretta

può dirsi *retroderivazione;* come a distinzione della funzione derivata diretta, può dirsene l' inversa *funzione retroderivata*. Questa idea semplice in se stessa ci è autorizzata dall' esempio imperioso degli astronomi si antichi che moderni, i quali per segnare il cammino de' corpi celesti contro il progresso naturale de' gradi, cioè de' passi del gran Pianeta, usano il vocabolo *retrogrado* composto dall' aggregazione de' due vocaboli semplici *retro*, *grado*.

Quindi

funzione retroprima		*funzione prima*
funzione retroseconda		*funzione seconda*
funzione retroterza	sono in opposizione a	*funzione terza*
. . . .		. . . .
funzione retronsima		*funzione nsima*

Si noti però che può farsi lecito in forma di laconismi l' uso di *derivata* a luogo di *funzione derivata*, di *retroderivata* a luogo di *funzione retroderivata*; laconismi che non apportano nè oscurità, nè equivoco: non oscurità; perchè richiamano senza fatica le idee che si vogliono esprimere: non equivoco; perchè non avvi in analisi delle altre idee segnate co' semplici vocaboli *derivate*, *retroderivate*.

14. Ma quale sarà la cifra segnante la di già stabilita notazione vocale del Calcolo inverso?

La derivazione diretta non differisce in fondo dall' inversa che nell' opposizione delle operazioni: quindi per una perfetta corrispondenza delle loro rispettive notazioni cifrali non bisogna che frapporvi un qualche segno, il quale indi-

caſſe cotale opposizione. Nella derivazione diretta per notare in generale una funzione non si è adottata che la lettera f del carattere delle diciture; quindi nell' inversa per segnare queſta medesima idea non dee usarsi che la medesima lettera. Nella prima derivazione per marcare una funzione derivata di un ordine immediatamente superiore si è fatto aumentare dell' unità l' esponente di quella lettera; quindi per notare nella seconda il ritorno di una funzione derivata a quella dell' ordine immediatamente inferiore non dee che diminuirsi dell' unità queſto esponente. In somma nel primo caso quello aumento si è scritto con

$$f^{1}(f^{n-1}x)=f^{n}x$$

quindi nel secondo queſta diminuzione dee scriversi con

$$f^{-1}(f^{n}x)=f^{n-1}x$$

Si conchiuda adunque che $f^{-n}x$ è la notazione cifrale che l' analisi-logica, poggiando sulla vera metafiſica della coſa, ci porta a fiſſare in generale per le funzioni retroderivate; che

$$f^{-n}(f^{m}x)=f^{m-n}x$$

segna la retroderivata nsima di $f^{m}x$; che in queſta segnatura è sempre $m>n$; che nel caso particolare di $m=n$, eſſa esprime la funzione primitiva donde proviene $f^{m}x$; che finalmente il progreſſo degli ordini delle retroderivate ci avvicina alla funzione primitiva come quello delle deriva-

te ce ne allontana, e perciò che una retroderivata di ordine maggiore corrisponde sempre ad una derivata di ordine minore.

Nella retroderivazione delle funzioni multivariabili si producono similmente alla derivazione delle funzioni retroderivate parziali: non occorre insiftere sulla segnatura propria per notarle: è cofa evidente che deffa si ha in quella delle derivate parziali, mettendovi nella orale, il vocabolo *retroderivata* a luogo del *derivata*, e mutandovi nella cifrale, l' efponente positivo di f in negativo.

Ma è tempo di venire alla traduzione ed al paragone de' segni già propofti e ftabiliti con quelli dell' antico linguaggio: oggetto della seconda parte.

SECONDA PARTE

15 In quefta seconda parte ci proponiamo 1° la traduzione de' segni derivati ne' differenziali: 2° quella de' retroderivati negl' integrali: 3° il paragone ed i caratteri di preferenza degli uni e degli altri. Scorrendo il primo argomento daremo una metafisica dell' antico linguaggio *differenziale* più semplice e filosofica di quello si è fatto sinogg : scorrendone il secondo svilupperemo i principj donde è venuto il linguaggio *integrale*, e ne faremo mercè l' analisi rilevare l' assurdità: scorrendone finalmente il terzo assegneremo il rapporto generale fra l' antico e nuovo Calcolo in queftione, vi fisseremo quello particolare fra le loro rispettive notazioni, completeremo così il soggetto di quefta seconda parte, e conchiuderemo il noftro lavoro. *d*

I.

16. Si richiami la formola lagrangiana (8) sotto la forma

$$f(x+i)-fx = if^1x + \frac{i^2}{2} f^2x + \frac{i^3}{2.3} f^3x \left.\begin{matrix} \\ \\ + \ldots \frac{i^n}{1\ldots n} f^nx + \ldots \end{matrix}\right\}$$

Il secondo membro di questa formola, che nei qui appresso raziocinj suppongo ordinato alle potenze ascendenti di i, è la differenza tra lo stato primitivo di una funzione e quello a cui passa per l'aumento indeterminato i della sua variabile. I termini in questa differenza visi possono considerare come delle parti elementari: e perciò sul riguardo che costituiscono ed appartengono ad una differenza, possono in generale segnarsi col vocabolo *differenziali*; vocabolo che non ci richiama l'idea individuale della cosa; che non ci esprime, eziandio da lontano, la proprietà, la qualità, la provenienza di essa, cioè di quei termini; e che analizzato isolatamente non si trova destare che l'idea indefinita di una cosa appartenente ad un'altra detta *differenza*; quindi su tale riguardo ciascun termine della serie lagrangiana può dirsi *differenziale*; e perciò in generale può notarsi colla cifra d, lettera iniziale di questo vocabolo; ed in particolare al posto che vi occupa, lo può per le riflessioni (8), colla d^n. Questa origine analiti-

ca del vocabolo *differenziale* ci dà di lancio

$$i^n f^n x = d^n fx \text{ epperò } f^n x = \frac{d^n fx}{i^n}$$

risultato finale a cui si riduce la propostaci traduzione.

In effetto per generalizzare le idee ed unizzarne le segnature si consideri x come la più semplice delle funzioni; allora il suo aumento i, cioè la differenza tra il suo stato primitivo ed attuale, veste il carattere di differenziale, e perciò può notarsi ancora con questo vocabolo generale, e colla cifra dx. Quindi

$$f^n x = \frac{d^n fx}{dx^n}$$

che sostituendo a corrispondenza nella formola (8) ne avremo

$$\left.\begin{array}{l} f(x+dx) = fx + \dfrac{dfx}{dx}dx + \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2fx}{dx^2}dx^2 \\ \quad + \ldots \dfrac{1}{1\ldots n}\dfrac{d^nfx}{dx^n}dx^n + \ldots \end{array}\right\}$$

formola conosciuta sotto il nome di *Teorema di Taylor*; base del metodo differenziale; ed in cui ciascun fattore de' $\dfrac{d^n fx}{dx^n}$ è detto *Coefficiente differenziale*, perchè nella quantità segnata col vocabolo *differenziale* è il coefficiente dell' aumento della variabile detto ancora *differenziale*.

17. Questa metafisica del linguaggio differenziale, forse la più semplice e ragionata che se ne possa dare, è tuttavia mancante di quella esattezza che fa il carattere distintivo della scienza a cui appartiene. Questo stesso grado di esattezza nemmeno si trova in quelle che sene sono date dall' origine sino a' nostri ultimi giorni. Se mettiamo a parallelo l' una colle altre riconosceremo queste sempre al di sotto di quelle. In effetto entriamo nelle scuole di Leibnizio, di Newton, de' Moderni (scuole nelle quali la metafisica in questione ha sofferto de' cambiamenti), e nella prima vedremo nascere il vocabolo *differenziale* coll' ipotesi degli infinitamente piccioli; cioè da un' ipotesi tutta immaginaria; che non trova dimostrazione più convincente che nella concorrenza de' suoi risultati con quelli di metodi rigorosi altronde conosciuti; e che per renderne ragione e legittimarne lo autore fa mestiere riguardarla non come una cosa di reale, ma come una maniera di vedere e di esprimere facile e compendiosa, richiamandola sempre all' idea de' limiti, a cui in fondo si riduce.

Nella secoda troveremo che il suo fondatore ha tirato il vocabolo *flussione*, che tiene il luogo del *differenziale*, dal seno del movimento, segnandone la idea della velocità: cioè lo ha fatto dipendere da un' idea astratta e che niente ha di reale; da una idea di un semplice paragone, del rapporto tra lo spazio ed il tempo se il movimento è uniforme, o tra i loro differenziali se è variabile; da una idea soltanto chiara e precisa nel primo caso, ma dipendente dagl' infinitesimi o altra metafisica, se si cade nel secondo; da un' idea finalmente straniera all' analisi pura ed alla geometria a cui fu applicata.

Nella terza infine osserveremo 1° che i seguaci dell' idea de' limiti sono portati direttamen-

te alla considerazione del solo primo termine $i\,f'x$ della differenza (15); termine che per essere una parte di questa differenza lo dicono (Lacroix op. cit. in 8. n. 5.) *differenziale:* 2° che quelli delle nuove vedute lagrangiane convinti che una tale idea non è necessaria alla metafisica del calcolo differenziale, mentre può ripetersi tutta dalla sola e pura analisi; convinti perciò che i principj di questo calcolo possono spogliarsi e rendersi indipendenti da questa idea, la quale malgrado l'acutezza delle leggi di continuità la mente non vede con soddisfacente chiarezza, vennero a riggettarla; e guidati dall' istessa ragione de' primi continuano a segnare (Lacroix op.cit. in 4. n. 8.) quel medesimo primo termine coll' istesso vocabolo. Dalla segnatura di questa scuola si tira adunque immediatamente l' equazione

$$f'\,x = \frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$$

equazione che dà il coefficiente differenziale del primo ordine, e da cui si deduce (come farò vedere con tutta generalità *mio lav. ined. cit.*) la segnatura de' coefficienti degli ordini superiori.

21. Il maggior grado di esattezza della metafisica da noi proposta (num. preced.) su quelle della prima e seconda scuola, è sì manifesto che non occorre insistervi. Per quanto riguarda il suo paragone con quella della terza, dico; ciascuno de' termini della differenza in questione non ne è ugualmente una parte elementare? e perciò non ha gli stessi dritti al vocabolo *differenziale*? Quali sono dunque i caratteri di preferenza del primo sopra degli altri? Forse il posto che occupa nella serie? questo vi è altronde distinto coll' aggregazione di

altri vocaboli che n' esprimono l' idea coll' allocuzione *differenziale del primo ordine*: perchè dunque fissare la notazione del primo per tirarne quella degli altri; quando l' idea originale che la fissa è comune a tutti? Non è questo un nuovo grado di inesattezza filosofica, che i seguaci della idea de' limiti hanno aggiunto forse per bisogno, e quei delle nuove vedute lagrangiane, non so per qual ragione, alla filosofia (num. preced.) di questo vocabolo?

Onde, raccogliendo, la metafisica che può darsi del linguaggio differenziale, ha forse quei gradi di esattezza filosofico-analitica di quella del nuovo linguaggio? Ma qui mi arresto, poichè la considerazione di questo rapporto è il soggetto del numero terzo.

II.

18. Il valore di una variabile dal punto in cui comincia a variare sino a quello in cui si considera non è che la somma di tutti i suoi accrescimenti. I primi scrittori dell' analisi infinitesimale seguendo le idee di Leibnizio non considerarono (*Lacroix op. cit. in* 8. *n.* 145.) i differenziali di una variabile che come una cosa stessa de' suoi accrescimenti: quindi riguardando una variabile qualunque come il risultato della somma di tutti i differenziali, si trovarono tacitamente convenuti sul modo di segnarla col vocabolo *integrale*; vocabolo che in generale desta l' idea dell' intero di una cosa, cioè dell' aggregazione delle sue parti. Nelle vedute adunque leibniziane il sommare è l' operazione per ritornare dalla conoscenza dei differenziali a quella degl' integrali; cioè si considera come l' operazione fondamentale del Calco-

lo integrale: quindi fluiva naturalmente il segnarvi questa operazione colla lettera $\int$ iniziale di somma.

• Or si è detto (15) che $i^n f^n x$ corrisponde nell'antico linguaggio a $d^n fx$: quindi $\int i^n f^n x$ corrisponderà ad $\int d^n fx = d^{n-1} fx$: quindi progredendo all'indietro avremo che

$d^n fx$	corrispondono a	$i^n f^n x$
$\int d^n fx = d^{n-1} fx$		$\int i^n f^n x$
$\int d^{n-1} fx = d^{n-2} fx$		$\int^2 i^n f^n x$
$\int d^{n-2} fx = d^{n-3} fx$		$\int^3 i^n f^n x$
. . . . .		. . . .
$\int d^2 fx = dfx$		$\int^{n-1} i^n f^n x$
$\int dfx = fx$		$\int^n i^n f^n x$

cioè notando $f^n x$ con X, e (16) i con dx, epperò (13) fx con X^{-n} avremo in generale che X^{-n} corrisponde ad $\int^n X dx^n$, cioè in linguaggio ordinario, che *la retroderivata nsima di una funzione corrisponde all'integrale dell'ordine* n *di essa moltiplicata pella potenza* n *dell'aumento della sua variabile*.

Quindi facendo nella formola (8) $i = -x$

epperò $f(x = o) =$ Cofiante $= C$

supponendo $f^{1} x = X$

epperò $f^{m} x = \frac{d^{m} X}{dx^{m}}$, $fx = f^{-1} X = \int X dx$

ne avremo il teorema bernulliano

$$\int X dx = C + Xx - \frac{x^2}{2}\frac{dX}{dx} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^2X}{dx^2} \ldots \ldots \mp \frac{x^n}{1..n}\frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}} \mp \ldots$$

teorema detto così, perchè trovato da Giovanni Bernulli, e considerato da'primi scrittori del Calcolo differenziale come la base dell'integrale; considerazione a cui furono senza meno portati per vedergli affegnare sul campo l'integrale (del primo ordine) di una funzione, qualunque ne sia la natura.

Ecco come l'idea di considerare la variabile qual somma di tutti i differenziali produffe il linguaggio del Calcolo integrale; come il suo algoritmo si traduce in quello da noi propofto; come quefta traduzione ci porta al momento sul teorema bernulliano; come ci disvela che la formola lagrangiana contiene nelle vedute eziandio degli antichi il germe per così esprimermi del ramo sì diretto che inverso del Calcolo infinitesimale.

Ma esaminiamo ora col soccorso dell'analisi la vera natura di quefto linguaggio.

19. L'esame analitico che ci proponiamo non si riduce che a trovare l' integrale definito di una funzione espresso in funzione degli accrescimenti concepiti dalla sua variabile. Sia pertanto X una funzione data di x; e sia proposto di assegnarne l' integrale dell' ordine n tra $x = a$ ed $x = a_m$.

Noi abbiamo adunque per dato $X = \text{f}^n x$, e per incognito $\text{f}^{-n} X = \text{f}x$.

Si faccia $\text{f}^{\pm n} X = \mathrm{X}^{\pm n}$ (sostituzione che può praticarsi senza equivoco prendendo la X dal carattere delle diciture, e che io son solito adottare per la maggiore semplicità delle formole), ed avremo (8) marcando con r un numero intero

$$\left.\begin{array}{l} \text{f}(x+i) = \mathrm{X}^{-n} + i\mathrm{X}^{1-n} + \frac{i^2}{2}\mathrm{X}^{2-n} + \ldots \frac{i^{n-1}}{1..(n-1)} X^{-1} \\ \quad + \frac{i^n}{1..n}\mathrm{X} + \ldots \frac{i^{n+r}}{1..(n+r)}\mathrm{X}^r + \ldots \end{array}\right\}$$

Partendo da $x = a$, e facendo consecutivamente

$$x + i = a + i = a_1\,,\quad x + i = a_1 + i = a_2$$
$$x + i = a_2 + i = a_3\,, \ldots x + i = a_{m-1} + i = a_m$$

ne avremo il seguito delle serie

$$\left.\begin{aligned} fa_1 = X_a^{-n} + iX_a^{1-n} + \ldots \frac{i^n}{1..n} X_a + \frac{i^{n-1}}{1..(n+1)} X_a^1 \\ + \ldots \frac{i^{n+r}}{1..(n+r)} X_a^r + \ldots \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} fa_2 = X_{a_1}^{-n} + iX_{a_1}^{1-n} + \ldots \frac{i^n}{1..n} X_{a_1} + \frac{i^{n+1}}{1..(n+1)} X_{a_1}^1 \\ + \ldots \frac{i^{n+r}}{1..(n+r)} X_{a_1}^r + \ldots \end{aligned}\right\}$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned} fa_m = X_{a_{m-1}}^{-n} + iX_{a_{m-1}}^{1-n} + \ldots \frac{i^n}{1..n} X_{a_{m-1}} + \frac{i^{n+1}}{1..(n+r)} X_{a_{m-1}}^1 \\ + \ldots \frac{i^{n+r}}{1..(n+r)} X_{a_{m-1}}^r + \ldots \end{aligned}\right\}$$

serie che sommate danno la formola

$\mathrm{f}a_m = X^{-n}_{a_m} = \ldots$

$$X^{-n}_{a} + i\left(X^{1-n}_{a} + X^{1-n}_{a_1} + \ldots X^{1-n}_{a_{m-1}}\right)$$

$$+ \frac{i^2}{2}\left(X^{2-n}_{a} + X^{2-n}_{a_1} + \ldots X^{2-n}_{a_{m-1}}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{i^{n-1}}{1..(n-1)}\left(X^{-1}_{a} + X^{-1}_{a_1} + \ldots X^{-1}_{a_{m-1}}\right)$$

$$+ \frac{i^{n}}{1..n}\left(X_{a} + X_{a_1} + \ldots X_{a_{m-1}}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{i^{n+r}}{1..(n+r)}\left(X^{r}_{a} + X^{r}_{a_1} + \ldots X^{r}_{a_{m-1}}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Non mi arresto a maneggiare questa formola generale, ed a tirarne delle conseguenze utili all'analisi in cui siamo, come ho fatto in un altro opuscolo (inedito) sulle *Conseguenze immediate del teorema lagrangiano nel Calcolo inverso delle funzioni derivate*. Solo ne prendo ciocchè conviene al mio soggetto.

Sia $n = 1$ ed avremo

$$X^{-1}_{a_m} = X^{-1}_{a} + i\left(X_a + X_{a_1} + X_{a_2} + \ldots X_{a_{m-1}}\right)$$

$$+ \frac{i^2}{2}\left(X^1_a + X^1_{a_1} + X^1_{a_2} + \ldots X^1_{a_{m-1}}\right)$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ \frac{i^r}{1..r}\left(X^{r-1}_a + X^{r-1}_{a_1} + X^{r-1}_{a_2} + \ldots X^{r-1}_{a_{m-1}}\right)$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$

ovvero rimettendo

$\mathrm{f}a_m$ per $X^{-1}_{a_m}$, $\mathrm{f}a$ per X^{-1}_a, e le $\mathrm{f}^r a_m$ per le $X^r_{a_m}$

avremo

$$\mathrm{f}a_m - \mathrm{f}a = \int_{a_m} X\mathrm{d}x - \int_a X\mathrm{d}x$$

$$= i\left(\mathrm{f}^1 a + \mathrm{f}^1 a_1 + \ldots \mathrm{f}^1 a_{m-1}\right)$$

$$+ \frac{i^2}{2}\left(\mathrm{f}^2 a + \mathrm{f}^2 a_1 + \ldots \mathrm{f}^2_{a_{m-1}}\right)$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ \frac{i^r}{1..r}\left(\mathrm{f}^r a + \mathrm{f}^r a_1 + \ldots \mathrm{f}^r a_{m-1}\right)$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$

ovvero notando per la semplicità de' raziocinj con $A^{(r)}$ le quantità entro le parentesi, avremo

$$\int_{a_m} \mathrm{X}dx - \int_a Xdx = i\left(A' + \frac{i}{2}A'' + \frac{i^2}{2.3}A''' + \ldots \frac{i^{r-1}}{1..r}A^{(r)} + \ldots\right)$$

20. Un termine qualunque della serie entro la parentesi rispetto al precedente, e l'errore commesso prendendo il primo pel valore totale della serie; divengono sempre più piccioli in ragione dell' impicciolimento di i: verità generale, che portò Leibnizio (*Lacroix op.cit. in* 8. *n.*7.) a fondare il Calcolo differenziale sull'idea degl' infinitesimi; Newton su quella delle ultime ragioni; D'Alembert su quella de' limiti; idee nel fatto le stesse, e solo diverse nella maniera di vedere la cosa.

Or sia per ipotesi che una quantità possa essere aumentata o diminuita realmente all'infinito, e perciò che la differenza tra le quantità finite e le infinitamente picciole attuali si riduca a non essere state le prime diminuite senza fine come le seconde. Una quantità diminuita attualmente senza fine, è ridotta ad una picciolezza attualmente minore di qualunque quantità assegnabile, cioè secondo il linguaggio della scuola leibniziana, è divenuta infinitesima; e perciò il trascurarla non dà che un errore inassegnabile: un errore inassegnabile può a rigor geometrico riputarsi realmente nullo e trascurarsi: quindi po-

tendo supporsi i attualmente infinitesimo, ciascun termine $\frac{A^{(r)}i^{r-1}}{1\ldots r}$ della serie in questione sarà ancora infinitesimo rispetto al precedente $\frac{A^{(r-1)}i^{r-2}}{1\ldots(r-1)}$, e perciò trascurabile (ecco l'origine de' varj ordini d'infinitesimi considerati il superiore come nullo in faccia all'inferiore) a rigor geometrico: quindi l'errore che si commette facendo

$$A' = \frac{i}{2}A'' + \frac{i^2}{2.3}A''' + \ldots$$

sarà ancora a rigor geometrico infinitesimo e trascurabile. Nell'ipotesi adunque in cui siamo sarà a rigor geometrico

$$\int_{a_m} X\mathrm{d}x - \int_a X\mathrm{d}x = A'i = i\mathrm{f}'a + i\mathrm{f}'a_1 + \ldots i\mathrm{f}'a_{m-1}.$$

Ma in questa ipotesi ciascuno de' termini $i\,\mathrm{f}'a_{m-1}$ non è che l'aumento infinitesimo concepito dalla funzione mercè l'aumento i della variabile, cioè in generale, la differenza infinitesima di due quantità finite, detta da' leibniziani *differenziale*: dunque è in questa ipotesi ancora che l'integrale è la somma de' differenziali. La filosofia adunque (18) del vocabolo *integrale* va dipendente dagli infinitesimi di Leibnizio.

Ma l'ipotesi su cui abbiamo fondato la metafisica leibniziana è reale o immaginaria? è vera o

falsa? dimostrata o senza dimostrazione? Non occorre insiftere su quefto argomento. La noftra ipotesi non è che il principio fondamentale della *geometria dell' infinito* di Fontanelle; principio con cui quefto autore pretese softenere sì fatta metafisica; principio abbaftanza confutato da Maclaurin nel suo *Trattato delle flussioni*, e da Buffon nella *Prefazione alla traduzione del metodo delle flussioni di Nevvton*. L' insussiftenza adunque della metafisica dell' antico linguaggio del Calcolo integrale refta provata; insussiftenza su cui, titubando forse l' inventore, pensò per softenersi di mutare gl' infinitesimi in incomparabili, e perciò di softituire al geometrico il rigor fisico, cioè l'approssimazione; cosa impropria, come l' idea delle flussioni, al suo soggetto. Quindi conchiudo: il linguaggio di cui si tratta è inesatto, perchè inesatta è la metafisica da cui si ripete. Quefto linguaggio adunque merita forse che si softenga nel suo posto e nella preferenza sul nuovo? Eccoci al soggetto del numero terzo.

III.

21. L' oggetto analitico del Calcolo differenziale si è di assegnare la relazione de' coefficienti differenziali; allorchè ne è data quella delle funzioni a cui appartengono; o viceversa: e quello del Calcolo derivato è di determinare la relazione delle funzioni primitive; o reciprocamente.

Ma sappiamo (16. 18.)

$$\text{che} \quad \frac{d^n X}{dx^n} \quad \text{e} \quad f^n X$$

$$\text{che} \quad \int^n X dx^n \, \text{e} \; f^{-n} X$$

scno in fondo una medesima cosa: dunque il Calcolo differenziale non differisce dal derivato, e l'integrale dal retroderivato che nella sola espressione. Questo argomento a priori sull'identità di questi calcoli forma una prova attiva che la differenza de' loro rispettivi metodi si riduce alla sola notazione e maniera di enunciarli. Quindi il tutto essendo per altro eguale si presenta naturalmente la questione: qual'è fra le due segnature quella che più conviene a questo Calcolo? Rispondiamo a questo quesito.

22. La notazione *Coefficiente differenziale* dipende (15) dalla notazione *differenziale*, e perciò è (17) inesatta a questo solo riguardo. E' inesatta ancora indipendentemente da essa: l'idea che ci presenta cotale notazione è isolatamente di una quantità che concorre (15) coll'aumento *i* della variabile alla composizione de' termini della serie lagrangiana; dico isolatamente, perchè non ci richiama cosa sia quella quantità, quali ne siano i caratteri particolari, quale la sua provenienza: dunque tutta la sua espressione dell'essenza della cosa dipende da una cognizione aliena, ed è oggi ridotta ad una pura convenzione.

Cosa diremo poi della notazione *integrale* fondata sull'esistenza reale degl'infinitesimi? diremo che è in contraddizione della sua stessa natura, in quanto proviene da un impossibile.

Guardiamo ora le notazioni corrispondenti *funzione derivata e retroderivata*; l'idea generale della cosa, l'indole particolare di essa, il suo carattere individuale, vi sono tutti espressi; cioè in termini generali, vi si trova un'espressione, non convenzionale ma tutta esplicita, del genere della specie dell'individuo della cosa.

Quindi ravvicinando le une rispettivamente alle altre, che ne conchiuderemo? ne conchiuderemo che le prime non danno alcuna espressione della cosa qual'è, mentre le seconde ne danno tutta quella di cui è capace un algoritmo; che le prime non segnano se non il solo rapporto di posizione della cosa collà serie in cui nasce, laddove nalle seconde se ne leggono inoltre tutti quelli colla sua esistenza analitica; che le prime mostrano ciò che è la cosa nel fatto, e perciò non ce ne suggeriscono la cognizione analitica che a posteriori, mentre le seconde ce la mostrano quale è in se stessa, e ce la possono perciò far vedere a priori; in somma per qualunque verso si miri, le seconde presentano de' caratteri decisi di preferenza sulle prime.

23. Ma non sono queste vedute filosofiche le sole che in tale parallelo decidono siffatti caratteri: vi è ancora di più.

La elocuzione generale usata per esprimere i coefficienti differenziali non è che *coefficiente differenziale dell' ordine nsimo*, e *funzione nsima* ne è la corrispondente del nuovo linguaggio; elocuzioni di cui la seconda ha un' espressione vocale più compendiosa della prima.

Inoltre i coefficienti differenziali si notano in

generale colla cifra $\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$

e le funzioni derivate colla $\mathrm{f}^n X$

la prima di queste cifre occupa nell' impressione

f

circa quattro linee, nel mentre che la seconda non arriva ad occuparne due.

Similmente gl'integrali si notano con $\int^n X dx^n$

e le funzioni retroderivate con $f^{-n} X$
cifre delle quali la prima occupa tre ranghi di lettera più della seconda.

Quindi l'espressione cifrale delle nuove notazioni è assai più semplice di quella delle antiche; semplicità che rende le formole meno caricate e più distinte come il laconismo orale ne rende più facile la pronuncia.

24. Qui potremmo senza indugio conchiudere: ma rispondiamo ancora a degli argomenti di opposizione che Lacroix *(op. cit. in 4 n. 862, in 8 n. 545)* porta al cambiamento de' segni proposto da Lagrange.

I suoi argomenti si riducono a questi:

Un segno abbracciato dee mutarsi

1° quando è in contraddizione manifesta coll'idea che dee rappresentare

2° quando può abbreviarsi

3° quando modificato può contribuire allo sviluppo di nuovi rapporti.

Noi rispondiamo al 1° che i segni differenziali se non sono in contraddizione manifesta coll'idee che rappresentano, lo sono però *(num. preced.)* col loro oggetto e colla loro natura

Al 2° che questi segni mutati in quei della derivazione si trovano compendiati tanto nell'espressione vocale quanto in quella delle cifre

Al 3° che la filosofia de' segni sempre espressa e presente può illuminare sul vero oggetto analitico di una questione, e perciò potendo con-

tribuire sì al progresso come alla facilità e semplicità del suo sviluppo, può guidarci alla ricognizione de' rapporti che la natura meglio studiata o la società più ingentilita potrebbe presentarci; guida l'analisi colla ragione, vela impronta ne' diversi suoi metodi, e può concorrere così ora all' invenzione di uno ed ora alla perfezione di un altro: inoltre, il laconismo della loro espressione e la semplicità delle loro cifre ne rendono più distinto sì all' orecchio che all' occhio il discorso delle formole, e perciò le immagini parziali di esse se ne riportano alla mente più chiare e distinte; il paragone se ne fa più facile e completo; le astrazioni ne risultano meno paralogistiche e più feconde; le induzioni se ne tirano più immediate e generali; e le conquiste dell'analisi ne divengono più grandi e frequenti.

Mi si perdoni il soggiungere qui per conferma un argomento pratico. Si dia meco un guardo di paragone al num. 19 di questo opuscolo ed al num. 209 dell'op.cit. in 8 di Lacroix; e si veda nel primo quanto l'unità della segnatura rileva l'attenzione, e nel secondo quanto la varietà ve la fatica; in quello quanto la semplicità facilita il calcolo e rende spedito il calcolatore, ed in questo quanto la complicazione inviluppa l'uno e ritarda l' altro.

25. Ma ancora ci resta di racquietare i timori sulle difficoltà che operandosi la proposta rivoluzione de'segni (*Lacroix op.cit.luogo cit.* (*num.prec.*)) verrebbero ad incontrarsi nello studio delle Matematiche; difficoltà che provengono dal doversi continuamente ravvicinare delle formole e delle operazioni analoghe espresse con caratteri differenti.

A questo riguardo si rifletta che un metodo diviene un soggetto di pura erudizione, allorchè ve ne ha un altro che con maggiore vantaggio corrisponde al medesimo fine; che il complesso de' metodi della prima specie forma la parte erudita della scienza, e quello de' metodi della seconda costituisce lo stato attuale de' suoi progressi; che infine la prima è l'oggetto di applicazione di quelli soltanto che vogliono approfondirla e perfezionarla, e la seconda di quelli che vogliono apprenderla. Quindi traducendo nel nuovo linguaggio lo stato presente della scienza (traduzione non tanto ardua quanto potrà credersi) la sorgente delle nuove difficoltà che si temono non resta a carico che dei geometri, i quali si danno a salire i gradi del primo ordine, e però che degl'individui a cui non può riuscire che di poco momento il superarle. Inoltre l'algebra sublime che considera le funzioni nel passaggio da uno stato ad un altro parlerà il linguaggio funzionale come l'algebra elementare che le considerà sotto uno stato fisso e permanente: i caratteri fondamentali delle diverse parti delle matematiche analitiche non saranno che delle modificazioni di uno stesso carattere a tutte comune. Quindi l'utilità di un linguaggio fondamentale unico in tutti i rami dell' analisi sì pura che mista dovrà animarci all'impresa, e non lasciarci inoperosi per timore di tali difficoltà.

Dippiù l'autorità imponente del celebre autore che ce lo progetta, dee muoverci a sormontarle ancorchè maggiori di quello che realmente sono; e dee racquietarci nei nostri timori: la sua influenza non dee temersi come dice Lacroix *(op. cit. luogo cit.)*; ma farci sperare piuttosto l'esecuzione del gran progetto.

26. Finiamola una volta: noi potremmo ric[illegible]e de' punti di veduta sempre nuovi in sostegno della questione. Contentiamoci di fare de' voti acciocchè i geometri incaricati dell' istruzione vi parlino il nuovo linguaggio in preferenza dell'antico; vi traducano le loro lezioni; lo adottino nelle loro produzioni; lo sanzionino lo promulghino lo facciano conoscere, e ne promuovano così l'adozione generale, onde conseguire in tutti gli oggetti del paragone delle quantità i vantaggi di un linguaggio fondamentale unico, filosofico, semplice, preciso.

NB In un Catalogo che nel corso dell' impressione mi è venuto alla mano mercè qualche comunicazione incominciata col Continente, vi ho ritrovato tre opere, le quali dal titolo sembrano dover fare parola sopra il mio assunto; opere di cui l'una par che ne contrasti, e le altre due che ne secondino le vedute. Al momento mi son dato a procurarle. Se mi verrà il farne presto l'acquisto, e trovarvi cosa che merita qui menzione, io lo farò in un' Appendice nel modo che più converrà al mio soggetto.

F I N E

INDICE

Introduzione
Prima parte: vedute num. 1.
Segnatura generale delle funzioni 3.
Formola del loro sviluppo in serie quando una variabile vi concepisce un aumento 4.
Analisi de' coefficienti di questo sviluppo: origine delle funzioni derivate 5.
Notazione cifrale di queste funzioni 8.
Riflessioni sopra la stessa 9.
Considerazioni sulle notazioni delle funzioni derivate che risultano dallo sviluppo in serie delle funzioni multivariabili 10.
Tavola del sistema di nomenclatura cifrale e vocale delle funzioni derivate parziali 11.
Funzioni retroderivate: segnatura 13.
Seconda parte: piano 15.
Traduzione de' segni derivati ne' segni differenziali 16.
Analisi filosofica degli ultimi 17.
Traduzione de' segni retroderivati ne' segni integrali 18.
Esame filosofico-analitico di questi 19.
Paragone de' nuovi cogli antichi segni 21.
Conchiusione 26.

